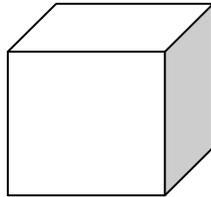


XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)

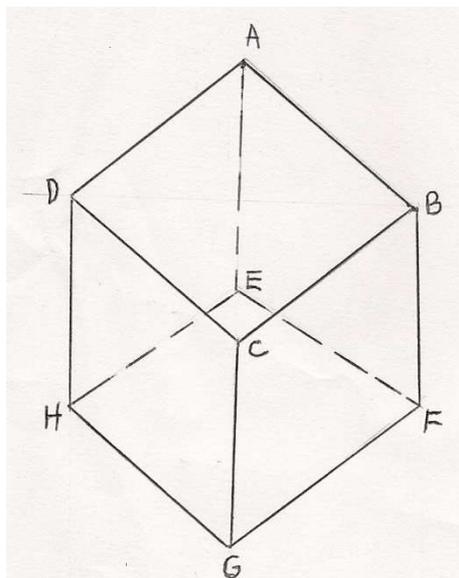


Qual é a maior sombra que um cubo sólido de aresta 1 pode ter, no sol a pino?

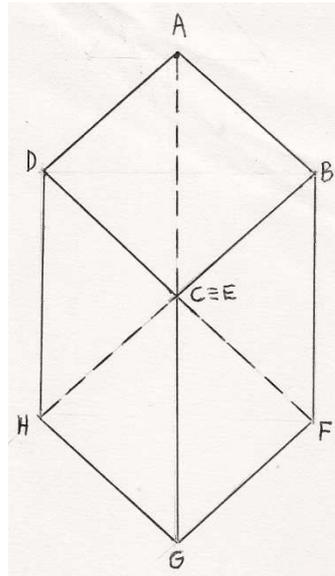
Observação: Entende-se “maior sombra de uma figura no sol a pino” como a maior área possível para a projeção ortogonal da figura sobre um plano.

RESOLUÇÃO:

1) Consideremos o cubo na posição inicial abaixo e o plano de projeção, esta página.



2) Se girarmos o cubo, de modo que a diagonal AG fique paralela ao plano da página, teremos essa diagonal em verdadeira grandeza, ou seja $\sqrt{3}$, já que a aresta mede 1. Por outro lado, a diagonal EC , que é perpendicular a AG e, portanto, perpendicular à página, será vista como um ponto, onde coincidem E e C . Essa é a maior projeção ortogonal do cubo, o hexágono $ABFGHD$.



3) Esse hexágono é composto de dois trapézios isósceles ($BFAG$ e $DHAG$) cuja base maior é a diagonal $AG = \sqrt{3}$. Por outro lado, as diagonais de faces BD e HF também estão em verdadeira grandeza, pois são perpendiculares a EC e, portanto, são paralelas à página. Logo, a altura dos trapézios é metade de BD ou metade de HF , ou seja, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $AC=BD=CG=EH$, temos que a base menor dos trapézios tem medida $AG - AC = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Finalmente temos que a área da maior sombra é

$$S = 2 \cdot \left[\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right] = \sqrt{6} - 1.$$